

Potenza n-esima di un binomio: Il triangolo di Tartaglia

In questa scheda ci si propone di fornire un criterio che permetta di calcolare la potenza $(a + b)^n$, con $n \in \mathbb{N}$.

Osserviamo le potenze ottenute:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Si può notare che:

- lo sviluppo di ciascuna potenza dà origine a un polinomio omogeneo dello stesso grado dell'esponente della potenza, completo e ordinato secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b ;
- il primo coefficiente è sempre uguale a 1;
- i coefficienti di ciascuna riga si ottengono utilizzando una disposizione dei numeri a triangolo, detto *triangolo di Tartaglia*.

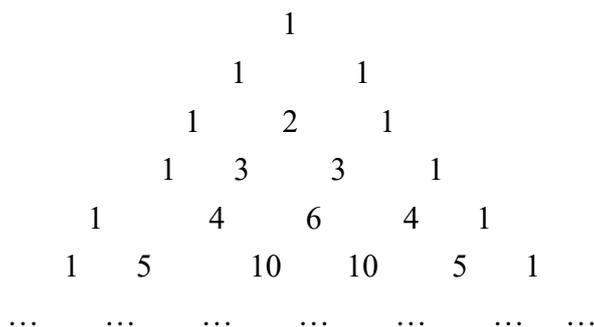


Figura 2. Il triangolo di Tartaglia

In questo triangolo i numeri di ciascuna riga (tranne il primo e l'ultimo che sono uguali a 1) sono la somma dei due soprastanti della riga precedente.

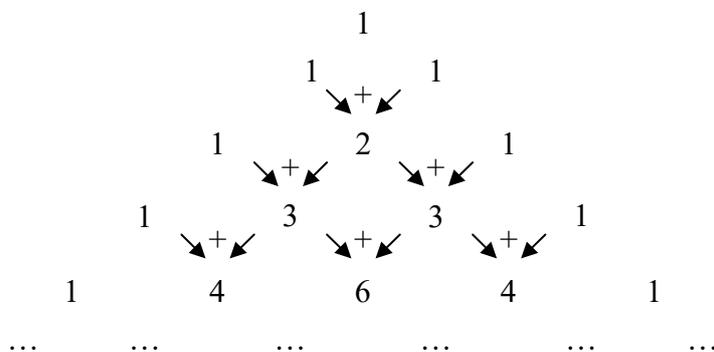


Figura 3. Costruzione del triangolo di Tartaglia

Con questa semplice regola si hanno gli sviluppi:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a b^2 + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a b^3 + 6a b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a b^4 + 10a b^3 + 10a b^2 + 5ab^4 + b^5$$

Sviluppa la seguente potenza di binomio

$$\begin{aligned} 1. (2a - b^2)^4 &= (2a)^4 + 4 \cdot (2a)^3 \cdot (-b^2) + 6 \cdot (2a)^2 \cdot (-b^2)^2 + 4 \cdot (2a) \cdot (-b^2)^3 + (-b^2)^4 = \\ &= 16a^4 - 32a^3b^2 + 24a^2b^4 - 8ab^6 + b^8 \end{aligned}$$